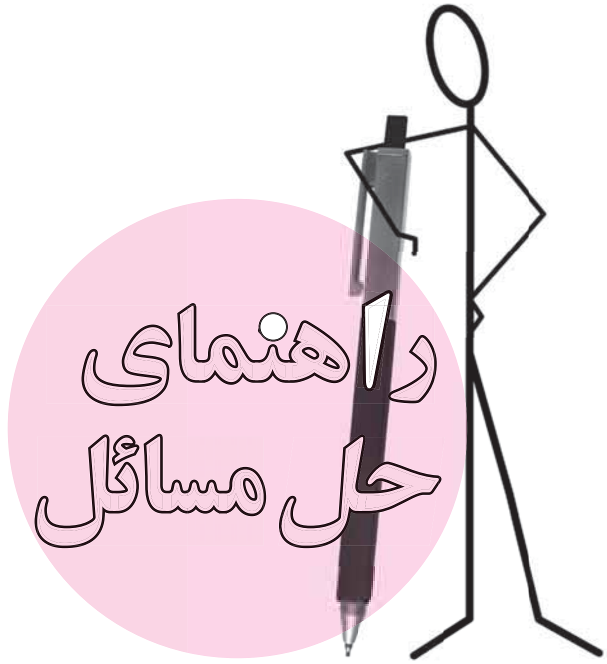


ریاضی دهم

۱.

$y_۱ = x^۲$

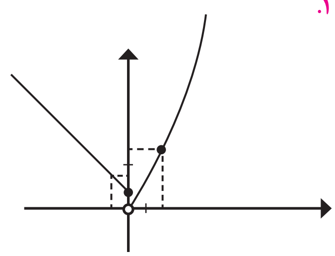
x	۲	۳
$y_۱$	۴	۹

$y_۲ = ۲x$

x	۰	۲
$y_۲$	۰	۴

$y_۳ = -x + ۱$

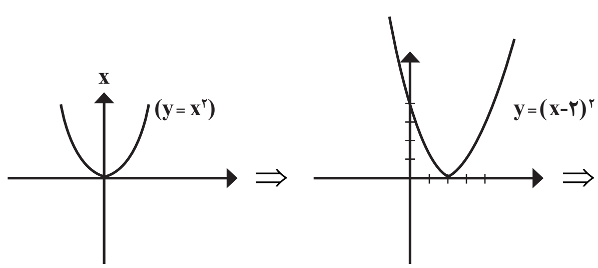
x	۰	−۱
$y_۳$	۱	۲

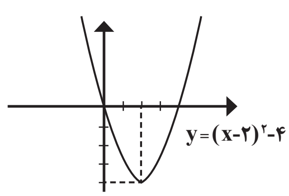


$$D_g = R,\ R_g = (۰, +\infty)\quad g(-۱) = -(-۱) + ۱ = ۲$$
$$g(g(-۱)) = g(۲) = ۲(۲) = ۴$$
$$g(g(g(-۱))) = g(۴) = ۴^۲ = ۱۶$$

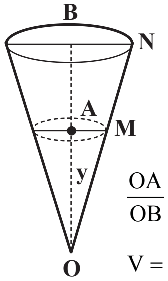
۲.

$$g(x) = x^۲ - ۴x = (x-۲)^۲ - ۴$$





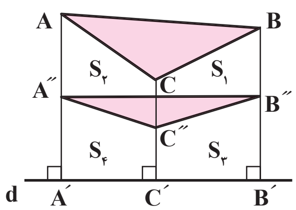
۳. به کمک تشابه مثلث‌ها (قضیهٔ تالس) می‌توان نوشت:



$$\frac{OA}{OB} = \frac{AM}{BN} \Rightarrow \frac{y}{۱۵} = \frac{AM}{۵} \Rightarrow AM = \frac{y}{۳} = r$$
$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ . y = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{y}{۳})^۲ . y = \frac{\pi y^۳}{۲۷} = x$$
$$\Rightarrow y = \sqrt[۳]{\frac{۲۷x}{\pi}}\quad x = ۵۰ \Rightarrow y = \sqrt[۳]{\frac{۲۷\times ۵۰}{\pi}} \approx ۷/۵cm$$

هندسهٔ دهم

۱. ذوزنقه‌های $CBB''C''$ و $B''C''C'B'$ هم مساحت هستند (چرا؟) و به‌همین ترتیب، ذوزنقه‌های $ACC''A''$ و $A''C''C'A'$، و همچنین ذوزنقه‌های $ABB''A''$ و $A''B''B'A'$ هم مساحت هستند. بنابراین داریم:

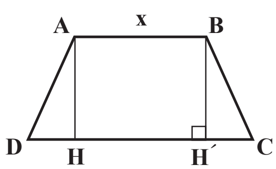


$$S_{ACBB''C''A''} = S_{A''C''B''B'A'}$$
$$\Rightarrow S_۱ + S_۲ + S_{A''B''C''} = S_۳ + S_۴ \ (۱)$$
$$S_{ABB''A''} = S_{A''B''B'A'}$$
$$\Rightarrow S_۱ + S_۲ + S_{ABC} = S_{A''B''C''} + S_۳ + S_۴ \ (۲)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$S_۱ + S_۲ + S_{ABC} = S_{A''B''C''} + S_۱ + S_۲ + S_{A''B''C''}$$
$$\Rightarrow S_{ABC} = ۲S_{A''B''C''}$$

۲.

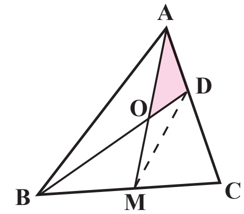


$$CD = ۲AB = ۳AH$$
$$DH = CH' = \frac{CD - AB}{۲} = \frac{AB}{۲}$$

پس با فرض AB=x داریم:

$$CD = ۲x,\ AH = \frac{۲x}{۳},\ DH = \frac{x}{۲}$$
$$\Rightarrow AD = \sqrt{AH^۲ + DH^۲} = \sqrt{\frac{۴x^۲}{۹} + \frac{x^۲}{۴}}$$
$$= \sqrt{\frac{۲۵x^۲}{۳۶}} = \frac{۵x}{۶} \Rightarrow P = AB + CD + ۲AD$$
$$= x + ۲x + \frac{۵x}{۳} = ۲۸ \Rightarrow ۱۴x = ۸۴ \Rightarrow x = ۶$$
$$\Rightarrow AB = ۶, CD = ۱۲, AH = ۴,$$
$$S = \frac{AB + CD}{۲} \times AH = ۳۶cm^۲$$

۳. می‌دانیم در هر مثلث، میانهٔ هر ضلع مساحت مثلث را به دو بخش معادل تقسیم می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:



$$S_{ABM}=S_{ACM}, S_{AOB}=S_{BOM}, S_{AOD}=S_{DOM}$$

حال می‌نویسیم:

$$S_{AMB}=S_{AMC}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$$

$$S_{AOB}=S_{OBM}=\frac{۱}{۲}S_{ABM}=\frac{۱}{۴}S_{ABC}$$

$$S_{DMB}=S_{DMC}=S_{ODM}+S_{OMB}=S_{OAD}+\frac{۱}{۴}S_{ABC},$$

$$S_{DMC}+S_{ODM}+S_{OAD}=S_{AMC}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$$

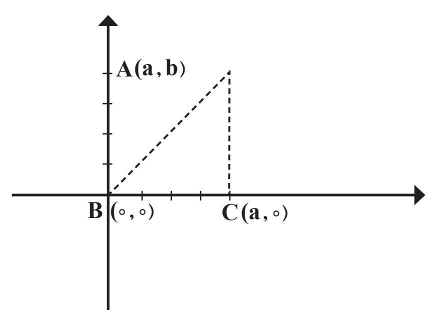
$$\Rightarrow S_{OAD}+\frac{۱}{۴}S_{ABC}+S_{OAD}+S_{OAD}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$$

$$\Rightarrow ۳S_{OAD}=\frac{۱}{۴}S_{ABC}, S_{OAD}=\frac{۱}{۱۲}S_{ABC}$$

۴. مساحت مثلث ABC با توجه به قضیهٔ پیک برابر است با:

$$(۱)\quad S=\frac{B}{۲}+i-۱$$

(برای ایجاد تمایز، تعداد نقاط درونی را با حرف B نمایش دادیم.)



همچنین روشن است که:

$$(۲)\quad S=\frac{AC\times BC}{۲}=\frac{b.a}{۲}$$

اما تعداد نقاط شبکه‌ای مرزی این مثلث چندتا است؟ (i=؟) روی ضلع BC، a+۱ نقطهٔ شبکه‌ای داریم (چرا؟) و روی ضلع AC نیز b+۱ نقطهٔ شبکه‌ای داریم که یکی از آن‌ها روی BC هم هست. اما معادلهٔ خط AB به‌صورت $y=\frac{b}{a}x$ است (چرا؟) و چون a و b نسبت به‌هم اول هستند پس تنها نقطه‌های شبکه‌ای روی این خط نقاطی هستند که طول آن‌ها مضرب صحیح a باشد (چرا؟) و این نقاط فقط خود نقاط A و B هستند. بنابراین تعداد نقاط شبکه‌ای مرزی مثلث ABC، مساوی a+b+۱ می‌باشد. یعنی B=a+b+۱ حال از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{ab}{۲}=\frac{a+b+۱}{۲}+i-۱\Rightarrow$$

$$i=\frac{ab}{۲}-\frac{a+b+۱}{۲}+۱=\frac{ab-a-b+۱}{۲}=\frac{(a-۱)(b-۱)}{۲}$$

حسابان

۱.

الف) $$\lim_{x\to ۵}\frac{(\sqrt{x-۱}-\sqrt{۲x-۶})(\sqrt{x-۱}+\sqrt{۲x-۶})}{(x-۵)(x+۴)(\sqrt{x+۱}+\sqrt{۲x-۶})}$$

$$\lim_{x\to ۵}\frac{\overbrace{(x-۱-۲x+۶)}^{-x+۵}}{(x-۵)(x+۴)(\sqrt{x-۱}+\sqrt{۲x-۶})}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{-۱}{(x+۴)(\sqrt{x-۱}+\sqrt{۲x-۶})}=\frac{-۱}{۳۶}$$

ب) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۳\sin x-۴\sin^۳x-۲(۱-۲\sin^۲x)}{۱-۲\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{-۴\sin^۳x+۴\sin^۲x+۳\sin x-۲}{۱-۲\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{-۴\sin^۳x+۲\sin^۲x+۲\sin^۲x+۳\sin x-۲}{۱-۲\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۲\sin^۲x(۱-۲\sin x)+(۲\sin x-۱)(\sin x+۲)}{(۱-۲\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{(۱-۲\sin x)(۲\sin^۲x-\sin x-۲)}{۱-۲\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}۲\sin^۲x-\sin x-۲=-۲$$

ج) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}[x]=\left[\frac{\pi}{۴}\right]=۰\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}\frac{۱-\tan x}{\sqrt{۱-\sin ۲x}}=?$$

$$x=\frac{\pi}{۴}+t\Rightarrow\lim_{t\to ۰^+}\frac{۱-\tan(\frac{\pi}{۴}+t)}{\sqrt{۱-\sin(\frac{\pi}{۲}+۲t)}}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۱-\dfrac{\tan\frac{\pi}{۴}+\tan t}{۱-\tan\frac{\pi}{۴}\tan t}}{\sqrt{۱-\cos ۲t}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۱-\dfrac{۱+\tan t}{۱-\tan t}}{\sqrt{۲\sin^۲t}}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\dfrac{۱-\tan t-۱-\tan t}{۱-\tan t}}{\sqrt{۲}|\sin t|}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{-۲\tan t}{\sqrt{۲}(۱-\tan t)\sin t}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{-۲(\overbrace{\frac{\tan t}{t}}^{۱})t}{\sqrt{۲}(۱-\tan t).(\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{۱})t}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{-۲}{\sqrt{۲}(۱-\tan t)}=-\sqrt{۲}$$

۲.

$$f(۲)=\frac{۲\times ۲}{۲-(-۲)}=۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\frac{۲\times ۲}{۲-(-۳)}=\frac{۴}{۵}$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\frac{۲\times ۱}{۲-(-۲)}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین f در این نقطه، از هیچ طرف پیوسته نیست (نه از راست پیوسته است و نه از چپ).

۳.

$$f(۱)=۱+\sin\frac{\pi}{۲}=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} a[x]+b=a+b$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} \frac{a\sin \pi x}{b(۱-x)}$$

$$x=۱+t\,,\,t\to ۰^-$$

$$=\lim_{t\to ۰^-}\frac{a\sin(\pi+\pi t)}{b(-t)}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{-a\sin \pi t}{-bt}$$

$$=\lim_{t\to ۰^-}\frac{a(\overbrace{\frac{\sin \pi t}{\pi t}}^{۱}).\pi t}{bt}=\frac{a\pi}{b}\Rightarrow a+b=\frac{a\pi}{b}=۲$$

$$\Rightarrow a=\frac{۲b}{\pi}\Rightarrow b+\frac{۲b}{\pi}=۲$$

$$\Rightarrow b(۱+\frac{۲}{\pi})=۲\Rightarrow b=\frac{۲}{۱+\frac{۲}{\pi}}=\frac{۲\pi}{۲+\pi}, a=\frac{۴}{۲+\pi}$$

جبر و احتمال

۱. $n(S)=۳۶$ و

$$A=\left\{\begin{matrix}(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۵),(۶,۵),(۵,۱),\\(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۶),(۶,۱),(۶,۲),\\(۶,۳),(۶,۴),(۱,۶),(۲,۶),(۳,۶),(۴,۶)\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۰}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$$

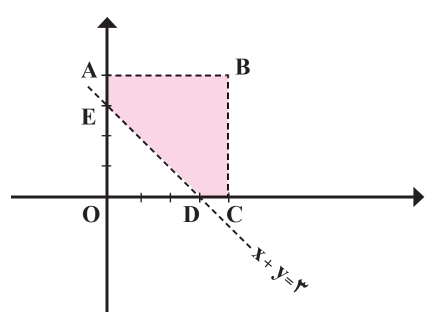
۲. طول و عرض این مستطیل‌ها را x و y در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$n(s)=\{(x,y)|x,y\in R, ۰<x,y<۴\}$$

$$\text{محیط}=۲(x+y)>۶\Rightarrow x+y>۳$$

$$A=\{(x,y)|(x,y)\in S, x+y>۳\}$$

$$P(A)=\frac{S_{ABCDE}}{S_{OABC}}=\frac{۱۶-\frac{۹}{۲}}{۱۶}=\frac{۲۳}{۳۲}$$



۳. پیشامدهای سالم بودن دو محصول را A و B می‌نامیم. هدف یافتن $P(A\cup B)$ است.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

و چون سالم بودن دو محصول مستقل از هم است، پس:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=۰/۷\times ۰/۷=۰/۴۹$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=۰/۷+۰/۷-۰/۴۹=٪۹۱$$

هندسهٔ ۲

۱. فرض می‌کنیم $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو نقطهٔ دلخواه و A' و B' تبدیل یافته‌های آن‌ها تحت f باشند:

$$\left.\begin{matrix}f(A)=A'(x_۱+۱,۱-y_۱)\\f(B)=B'(x_۲+۱,۱-y_۲)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$A'B'=\sqrt{(x_{A'}-x_{B'})^۲+(y_{A'}-y_{B'})^۲}$$
$$=\sqrt{(x_۱+۱-x_۲-۱)^۲+(۱-y_۱-۱+y_۲)^۲}$$
$$=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}=AB$$

پس f ایزومتری است، زیرا طول را ثابت نگه می‌دارد.
این تبدیل ترکیب دو تبدیل متوالی است. ابتدا بازتاب نسبت به محور xها و سپس انتقال در راستای بردار $\vec{u}=(۱,۱)$.

۲. چون L و L' متقاطع‌اند، پس محور بازتاب، نیم‌ساز زاویهٔ بین آن‌هاست. اگر $M(x,y)$ یک نقطهٔ دلخواه از نیم‌ساز باشد، از آنجا که M از L و L' به یک فاصله است، پس معادلهٔ نیم‌ساز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{|۲x+y-۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|x-۲y-۳|}{\sqrt{۱+۴}}$$

$$\Rightarrow |۲x+y-۱|=|x-۲y-۳|$$

$$\Rightarrow ۲x+y-۱=\pm(x-۲y-۳)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x+۳y+۲=۰\\۳x-y-۴=۰\end{matrix}\right.$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند.

۳.

$$T(x,y)=(y,-x)=(X,Y)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x=-Y\\y=X\end{matrix}\right., x+y=۲$$

$$\Rightarrow -Y+X=۲\Rightarrow Y=X-۲$$

۴.

$$T(x,y)=(kx,ky)=(X,Y)$$

$$\Rightarrow x=\frac{X}{k}, y=\frac{Y}{k}, y=x^۲+b\Rightarrow\frac{Y}{k}=\frac{X^۲}{k^۲}+b$$

$$\Rightarrow Y=\frac{۱}{k}.X^۲+bk\Rightarrow\frac{۱}{k}=\frac{۱}{۳}, bk=۶\Rightarrow k=۳, b=۲$$